MPA S2 algèbre

Responsable : Christine Huyghe

Contrôle Continu du 25 mars 2013. Durée : 2h.

Il sera accordé le plus grand soin à la qualité de la rédaction. Sont interdits : les documents, les téléphones portables, les baladeurs, et tout autre objet électronique (calculatrice, ...).

Dans tout le texte K sera un corps.

1. Cours. Les énoncés sont demandés ici sans démonstration (4pt).
   1- Donner la définition d'une famille libre $u_1, \ldots, u_k$ de k vecteurs dans un K-espace vectoriel E.
   2- Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E.
   3- Soient E un K-espace vectoriel, φ_1, φ_2 deux formes linéaires sur E. A quelle condition est-ce que $Ker(\varphi_1) = Ker(\varphi_2)$? Quand deux hyperplans de E sont-ils égaux ?
   4- Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire. Enoncer le théorème du rang.
2. Cours. (4pt). Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels sur K. Rappeler la définition de $Ker(f)$, rappeler la définition du fait qu'une application est injective. Montrer que f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$.
3. QCM. (4pt). Les réponses ne doivent pas être justifiées.
   1- Lesquels des sous-ensembles suivants forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned} &\textbf{A :} \{(x, y, z) \mid x - y - 3z = 0\}, \\ &\textbf{B :} \{(x, y, z) \mid x - y - 3z = 8\}, \\ &\textbf{C :} \{(x, y, z) \mid x - y^2 - 3z = 0\}, \\ &\textbf{D :} \{(x, y, z) \mid x - y - 3z = 8z\}. \end{aligned}$$

   2- Laquelle de ces familles forme une base de $\mathbb{C}^3$?

$$\begin{aligned} &\textbf{A :} \{(1, i, 1), (-1, 0, 1)\}, \\ &\textbf{B :} \{(1, i, 2i), (-1, 1, 0), (1, 1, 1 + i)\}, \\ &\textbf{C :} \{(1, i, 2i), (-1, 1, 0), (1 + i, 0, 2i)\}, \\ &\textbf{D :} \{(i, 0, 0), (1, 0, 0), (1, i, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

3- Soit f l'application linéaire : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Quelle affirmation parmi celles ci-dessous est exacte ?

A : $dim(Kerf) = 2$ et $rg(f) = 1$,

B : f n'est pas surjective,

C : f est surjective, mais pas injective,

D : $dim(Kerf) = 1$ et $rg(f) = 1$.

4- Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - 3e_2 + 4e_3 \\ f(e_2) = e_2 - e_3 \\ f(e_3) = -5e_1 + 2e_2 - e_3. \end{cases}$$

Quelle est, parmi les matrices ci-dessous, celle qui est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & -1. \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 4. \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1. \end{bmatrix}.$$

4. Exercice 1 (3pt).

1- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1- Déterminer $f(1i - 3j + 5k)$.

2- Déterminer Ker$f$. En donner une base. La matrice M est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

3- Déterminer Imf. Donner d'abord sa dimension puis une base.

5. Exercice 2 (6pt). Soient E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $e_1 = \sin x$, $e_2 = \cos x$, $e_3 = \sin(2x)$, et $e_4 = \cos(2x)$,

$$F = \{a \sin x + b \cos x + c \sin(2x) + d \cos(2x) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

On pourra admettre les résultat précédents pour résoudre une question.

1- Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de F.

2- Pour $f \in F$, on pose $D(f) = f'$, la dérivée de f. Montrer que D est une application linéaire : $F \to F$ et que la matrice de D dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3- Déterminer le rang de A. En déduire que D est un isomorphisme de F et que $Ker(D) = \{0\}$. Est-ce normal ?

4- Calculer A^2. Montrer que $(A^2 + Id)(A^2 + 4Id) = 0$. En déduire une expression de l'inverse de A en fonction de A. Qu'est-ce que cela signifie quand on veut intégrer une fonction du type $a \sin x + b \cos x + c \sin(2x) + d \cos(2x)$?